# SOPRA UN TEOREMA
# DI GEOMETRIA DESCRITTIVA
## E SUA APPLICAZIONE
## AL TRACCIAMENTO DEL CONTORNO DELL'OMBRA
## DI ALCUNI CORPI

---

## NOTA

**DEL PROF. GIUSEPPE BRUNO.**

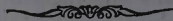
---

Estratta dagli Annali di Matematica pura ed applicata
tom. V.

---

ROMA
COI TIPI DELLA S. C. DE PROPAGANDA FIDE

1863.

## Sopra un teorema di geometria descrittiva e sua applicazione al tracciamento del contorno dell'ombra di alcuni corpi

Sia A una linea piana qualunque ed O una retta od asse contenuto nel piano di essa curva. Sia A' la posizione che ha preso la curva A quando questa si è fatta muovere nel suo piano in guisa che tutti i suoi punti abbiano descritto rette perpendicolari all'O aventi una lunghezza comune qualunque $a$. Si immagini ora un'altra linea qualunque piana mobile in modo che, mentre essa si mantiene sempre simile a se stessa e similmente disposta ed il suo piano sempre perpendicolare all'asse O, i punti in cui quest'asse incontra i piani delle successive posizioni di detta linea mobile sieno centri omologhi di similitudine delle ora nominate posizioni. La grandezza di questa linea mobile varii successivamente prima in modo che nelle sue varie posizioni la detta linea mobile incontri la linea A, poi talmente che nel suo moto sempre s'appoggi sulla linea A'; i luoghi geometrici così generati dalla linea mobile sono due superficie che chiameremo S ed S'. Se per l'asse O si conduca un piano qualunque, questo taglia le superficie S ed S' secondo due linee B e B' delle quali la seconda B' non è altro che la prima B trasportata nel suo piano in modo che tutti i suoi punti abbiano percorso rette perpendicolari all'asse O di lunghezza comune $b$ tale che il rapporto $\frac{b}{a}$ sia uguale al rapporto dei *raggi* secondo cui una qualunque delle posizioni della linea mobile è tagliata dai piani della direttrice A e B.

Da quest'osservazione che è una conseguenza immediata della similitudine di forma e posizione che la linea mobile sempre conserva si deduce che se si prende un punto qualunque M sulla superficie S, e per esso si conduce una perpendicolare $p$ all'asse O la quale (prolungata se fa d'uopo ) incontri la superficie S' in M', i piani tangenti ad S ed S' in M ed M' sono fra di loro paralleli.

Infatti conducendo per $p$ due piani uno dei quali passa per O l'altro vi sia perpendicolare, questi piani taglieranno le due superficie S ed S' ciascuno secondo due linee le quali passano pei punti M ed M' ed hanno in questi punti le tangenti rispettivamente parallele.

Se perciò ad una S' delle due superficie S ed S' si voglia condurre un piano tangente parallelo ad un piano dato, e l'altra superficie S sia di forma tanto più sem-

plice che ad essa riesca più agevole il condurre un piano tangente parallelo al dato si potrà far servire la costruzione di quest'ultima alla determinazione del chiesto piano tangente ad $S'$. Sia infatti P il piano tangente ad S parallelo al piano dato, e sia M il suo punto di contatto. Per M si conduca una perpendicolare $p$ all' asse O la quale incontri in $M'$ la supérficie $S'$: il piano condotto per $M'$ parallelamente a P sarà il piano domandato. E se sulla superficie S fosse segnata una linea qualunque C, e si domandasse di tracciare sulla superficie $S'$ una linea $C'$ tale che nei punti di essa i piani tangenti ad $S'$ fossero rispettivamente paralleli ai piani tangenti ad S nei punti di C basterebbe per ciascun punto M della linea C ripetere l'operazione superiormente indicata, e si determinerebbe così sulla superficie $S'$ altrettanti punti come $M'$ la cui successione costituirebbe la domandata linea $C'$.

Le considerazioni sopra esposte ricevono un'applicazione nel tracciamento geometrico del contorno $C'$ dell'ombra della superficie $S'$ quando si suppongono i raggi di luce tutti paralleli fra loro e ad una retta data L e si conosca inoltre il contorno C dell'ombra della superficie S illuminata anch'essa dai raggi paralleli ad L. Infatti le C e $C'$ sono le linee di contatto delle superficie S ed $S'$ con superficie cilindriche ad esse circoscritte avanti le loro generatrici parallele ad L, epperò i piani tangenti ad $S'$ nei punti di $C'$ sono rispettivamente paralleli ai piani tangenti ad S lungo la C, e quindi per quello che s'è detto poc'anzi conosciuta C facilmente si determina $C'$. Anzi più generalmente se s' immagina conosciuta sulla superficie S la linea Γ tale che i suoi diversi punti sieno con uguale intensità illuminati, ossia tale (poichè l'intensità dell'illuminazione in un punto di una superficie data, se i raggi luminosi procedono da un punto unico infinitamente lontano, è proporzionale al seno dell' angolo fatto dalla direzione dei raggi luminosi col piano tangente in quel punto alla superficie data) che in ogni suo punto il piano tangente ad S faccia un angolo costante e dato con L e si domandi di segnare sopra $S'$ la linea $\Gamma'$ di cui i varii punti sieno illuminati in misura uguale fra loro, ed uguale a quella con cui sono illuminati i punti della Γ su di S, la determinazione di $\Gamma'$ per mezzo di Γ si farà ancora nello stesso modo con cui si è detto più in su dedursi la linea $C'$ dalla C. Modificando alcun poco i ragionamenti fin qui fatti si potrebbero estenderne le conclusioni al caso in cui la direttrice A di S, e quindi anche la direttrice $A'$ di $S'$ non fossero linee piane, come pure sarebbe facile il dimostrare analiticamente le dette conclusioni a cui siamo giunti con considerazioni puramente geometriche. Ma passiamo invece ad arrecare esempi di questioni non infrequenti la cui soluzione è una facile applicazione delle proposizioni ora dimostrate.

Se la linea A sia una circonferenza di circolo avente il suo centro sull'asse O, e la linea mobile sia ancor essa una circonferenza circolare il cui centro percorra l'asse O, le superficie S ed $S'$ saranno rispettivamente una sfera ed un anello, e sic-

come sulla sfera tanto il contorno dell'ombra propria quanto le linee ugualmente illuminate sono circonferenze di circoli aventi i loro centri sul diametro della sfera che è parallelo alla direzione della luce, ed i cui raggi si determinano con costruzioni molto semplici, facilmente pure si possano segnare, ed il contorno dell' ombra propria della superficie dell'anello, e delle linee della superficie stessa, i cui punti sono illuminati con una stessa intensità data qualunque.

La linea mobile sia ancora una circonferenza, il cui centro sempre si trovi sull'asse C, e la linea A sia una sezione conica qualunque uno dei cui assi giaccia secondo la stessa retta O, la superficie S sarà una superficie di rivoluzione di 2.° ordine la cui linea di contatto con un cilindro circoscritto avente le generatrici parallele ad una retta data L si sa determinare, poichè essa è l'intersezione della superficie stessa col piano diametrale di essa che è conjugato delle corde parallele ad L, e quindi si sanno costruire le projezioni di detta curva di contatto, giacchè queste projezioni sono sezioni coniche delle quali si determina facilmente un sistema di diametri conjugati. Non sarà perciò nè lungo nè malagevole il descrivere la linea di contatto dell'ombra propria della superficie di rivoluzione generata da una data sezione conica che rota intorno ad una retta qualunque contenuta nel suo piano e parallela ad un suo asse.

La figura annessa è relativa al caso in cui la direttrice della superficie sia un elisse, e la generatrice mobile sia puranco elisse di cui il centro nelle successive posizioni che occupa essa generatrice sempre si trovi sopra una retta data contenuta nel piano e parallela ad un asse della elisse direttrice. Si è supposto di più (unicamente però per fissar meglio le idee, e perchè la figura avesse una miglior disposizione) che i punti in cui la generatrice nelle sue successive posizioni taglia la direttrice sieno vertici dell'elissi generatrici.

I piani di projezione furono presi, al solito, ortogonali fra loro, e quello di essi che dicesi comunemente verticale fu scelto parallelo all'elisse direttrice, e l'orizzontale perpendicolare alla retta dei centri della generatrice nelle sue posizioni successive. La elisse direttrice si projetta verticalmente in $A'B'C'D'$ in vera grandezza con un asse $A'C'$ perpendicolare alla linea di terra, ed orizzontalmente secondo DB parallela alla linea di terra stessa.

La linea luogo dei centri delle generatrici è projettata orizzontalmente in $g$ sul prolungamento di DB e verticalmente in $c'g'a'$. La generatrice nelle sue varie posizioni si projetta sul piano verticale secondo rette parallele alla linea di terra, ed orizzontalmente secondo elissi simili, concentriche in $g$, ed aventi ciascuna un asse omologo parallelo alla linea di terra. Nella figura sono segnate le projezioni

$$(1)\quad \begin{cases} DFD_1F_1 \\ D'D'_1 \end{cases} \quad \begin{cases} GiG_1j \\ A'A'_1 \end{cases} \quad \begin{cases} B\,H\,B_1\,H_1 \\ B'\,B'_1 \end{cases} \quad \begin{cases} GiG_1j \\ C'\,C'_1 \end{cases}$$

delle quattro posizioni che ha la generatrice quando incontra la direttrice in alcuno dei suoi vertici. La superficie è così projettata orizzontalmente nella corona compresa fra le due ellissi $DFD_1F_1$ e $BHB_1H_1$ e verticalmente nella figura $A'B'C'\ C'_1B'_1A'_1$ ; ed ha una forma annulare. I raggi di luce sono supposti paralleli alla retta che si projetta orizzontalmente in L verticalmente in L$'$, e si vuole segnare il contorno dell' ombra propria tanto sulla parte esteriore che sulla interiore dell'ora descritta superficie annulare. Per questo fine immagino trasportata orizzontalmente l'elisse direttrice della superficie annulare nel suo piano fintantochè il suo asse verticale che prima projettavasi in $\left\{\begin{matrix} G \\ A'C' \end{matrix}\right.$ venga a coincidere colla retta ad esso asse parallella $\left\{\begin{matrix} g \\ a'c' \end{matrix}\right.$, ossia colla retta dei centri dell'elisse mobile. In tal posizione l'elisse direttrice si projetterà orizzontalmente secondo la retta $bd$ parallela alla linea di terra , e verticalmente secondo l'elisse $a'b'c'd'$. Si concepisca ora un'elisse la quale restando sempre simile e similmente disposta alla generatrice della superficie annulare, come questa muovasi mantenendo il suo centro sulla retta $\left\{\begin{matrix} g \\ c'a' \end{matrix}\right.$, il suo piano perpendicolare alla retta stessa, e i cui due assi varino di grandezza talmente che il suo perimetro in ogni sua posizione incontri l'elisse poc' anzi nominata $\left\{\begin{matrix} bd \\ b'a'd'c' \end{matrix}\right.$. Il luogo geometrico di tutte le posizioni di questa elisse mobile è un elissoide a tre assi del quale la projezione verticale è l'elisse $a'b'c'd'$ e la orizzontale un'elisse $b\,l\,d\,f$ che ha il centro in $g$, un asse $bd$ parallelo alla linea di terra ed uguale all' asse orizzontale $b'\ d'$ dell' elisse $a'b'c'd'$, e l'altro asse $lf$ di grandezza determinata dalla condizione che l'elisse $bldf$ sia simile all'elisse $BHB_1H_1$ e similmente disposta. Gli assi del detto elissoide saranno così uno parallelo alla linea di terra, e gli altri due perpendicolari uno al piano orizzontale l'altro al piano verticale di projezione : essi si projettano rispettivamente in $\left\{\begin{matrix} bd \\ b'd' \end{matrix}\right. \left\{\begin{matrix} g \\ a'c' \end{matrix}\right. \left\{\begin{matrix} lf \\ g' \end{matrix}\right.$ : il centro poi dell'elissoide è projettato orizzontalmente in $g$, verticalmente in $g'$. Si immagini quest'elissoide illuminato da raggi paralleli alla retta $\left\{\begin{matrix} L \\ L' \end{matrix}\right.$; il contorno della sua ombra si sa essere una sezione fatta nella superficie dell'ellissoide da un piano che passa pel centro di questa superficie, e projettarsi perciò sui due piani di projezione secondo due elissi concentriche alle elissi projezioni dell'elissoide.

Se si conducono due piani verticali tangenti all'elissoide e paralleli alla direzione della luce , essi avranno per traccia orizzontale le rette parallele ad L tangenti nei punti 3 e 7 all'elisse $blfd$ : i punti 3 e 7 apparterranno perciò alla projezione orizzontale del contorno dell'ombra dell'elissoide : gli accennati punti di contatto trovan-

dosi sulla sezione principale dell'ellissoide che è parallela al piano orizzontale di projezione si projetteranno sulle $d'b'$ nei punti $3'$ e $7'$ i quali punti perciò saranno sulla projezione verticale del cercato contorno dell'ombra dell' elissoide. Le tangenti in 3 ed in 7 all'elisse *bldf* sono pure tangenti all'elisse projezione orizzontale del contorno dell'ombra, poichè questa projezione dell'ombra che abbiamo dimostrato dover passare per 3 e per 7 deve essere iscritta nell'elisse *bldf* projezione dell'elissoide : epperò la projezione orizzontale del contorno dell' ombra hà per un suo diametro la retta 37, ed il coniugato di questo diametro giace nella direzione della retta L ossia secondo *hk*. Per determinare la grandezza di questo secondo diametro s'immagini tagliato l'elissoide col piano verticale la cui traccia orizzontale è *hk*. La sezione sarà un elisse projettata orizzontalmente in *hk*, e verticalmente secondo un elisse di cui un asse è $a'c'$ l' altro $h'k'$, essendo $h'$ e $k'$ i punti in cui le perpendicolari alla linea di terra condotte per *h* e per *k* incontrano $d'b'$. Se alla sunnominata elisse sezione dell'ellissoide si conducono due tangenti parallele alla direzione della luce i punti di contatto, che sono punti del contorno dell'ombra dell' elissoide si projetteranno orizzontalmente sopra *hk*, epperciò le projezioni orizzontali dei detti punti di contatto saranno le estremità del diametro dell' elisse projezione orizzontale dell' ombra che è coniugato di 37.

Ora il punto dell'accennata elisse sezione dell' elissoide in cui la tangente è parallela alla retta $\left\{\begin{matrix} L \\ L' \end{matrix}\right.$ si projetta verticalmente nel punto in cui la projezione verticale della ridetta sezione è toccata da una retta parallela alla projezione verticale della direzione della luce, ossia nel punto in cui l'elisse che ha per assi $a'c'$, $h'k'$ ha la sua tangente parallela ad L'. È nota una costruzione con cui questi punti di contatto si determinano anche senza costruire l'elisse; sieno dunque $1'$ e $5'$ questi punti di contatto, essi saranno altri due punti della projezione verticale del contorno dell'ombra dell'elissoide. Per $1'$ e $5'$ si conducano le perpendicolari alla linea di terra fino ad incontrare *hk* in 1 e 5 : nelle due rette 37 e 15 si avranno due diametri coniugati della ridetta projezione orizzontale del contorno dell'ombra dell' elissoide che si potrà perciò facilmente segnare, e sarà l'elisse 12345678. La elisse projezione verticale dello stesso contorno dell'ombra dell'elissoide si potrebbe determinare con un procedimento analogo, cercando cioè la grandezza del diametro di essa parallelo ad L', del quale è coniugato il diametro $8'4'$ che unisce i punti $8'$ e $4'$ in cui la tangente all'elisse $a'b'c'd'$ è parallela ad L': Ma vi si arriva più speditamente osservando che $3'7'$ ed $1'5'$ sono anche due diametri coniugati della projezione verticale del contorno dell'ombra, perchè essi sono le projezioni verticali di due diametri dell' elisse contorno dell'ombra che si projettano orizzontalmente secondo i diametri 37, 15 della sua projezione orizzontale, i quali sono tra loro coniugati. Sopra i diametri $3'7'$ ed

ed $1'5'$ considerati come coniugati si costruisca dunque l'elisse $1'2'3'4'5'6'7'8'$, questa sarà la projezione verticale del contorno dell'ombra dell'elissoide. La figura stessa indica abbastanza senza più insistere come si determinino i punti più elevato e più depresso, e gli altri punti particolari dell'accennato contorno: passeremo dunque senz' altro a dedurne la projezione del contorno dell'ombra della superficie annulare.

E cominciando dal contorno dell'ombra sulla superficie esteriore dell'anello: se si tirino da $g$ ai diversi punti dell'ellisse 12345678 delle rette, e sul prolungamento di ciascuna di esse come $g$ 5 si porti da 5 in $r$ una lunghezza uguale a $gi$, i punti determinati come $r$ saranno sulla curva $mnpqrstu$ projezione orizzontale del contorno dell'ombra della parte esteriore della superficie annulare la quale projezione sarà perciò determinata: condotto poi per $5'$ una parallela e per $r$ una perpendicolare alla linea di terra finchè s'incontrino in $r'$, $r'$ sarà un punto della projezione verticale dello stesso contorno d'ombra, la qual projezione si potrà dunque determinare e sarà

$$m'\ n'\ p'\ q'\ r'\ s'\ t'\ u'.$$

Se poi la lunghezza $gi$ si porta ancora sulla $g$ 5 ma non a partire dal punto 5 ma sibbene dal punto 1 in $\rho$, questo punto $\rho$ apparterrà alla projezione orizzontale $\mu\ \nu\ \pi\ \chi\ \rho\ \sigma\ \tau\ \upsilon$ del contorno dell'ombra della parte interna della superficie annulare. Se finalmente per $1'$ si tira una parallela alla linea di terra e per $\rho$ una perpendicolare alla linea stessa, il punto $\rho'$ d'incontro delle rette tirate sarà sulla projezione verticale del contorno dell' ombra della parte interna della superficie dell' anello. Unendo tutti i punti determinati come $\rho'$ si avrà intera l'ora nominata projezione nella linea $\mu'\ \nu'\ \pi'\ \chi'\ \rho'\ \delta'\ \tau'\ \upsilon'$.

---

A'₁
a'
A'
B'₁
G'₁
D'₁
d'
k'
b'
D'
G'
B'
C'₁
c'
C'
L
H
s
F
D₁
d
b
D
G
B
B₁
G₁
F₁
v
n
H₁